RAMIRUS DELIVS BORGES DE MENESES

Vniversitas Catholica Lusitana
Portvs

Geometria et Geometriae: e mathematica ad philosopiam

Introductio

Geometriae quaestio, quae saltem secundum Einsteinii Relativitatis mentionem ab initio de euclidiana applicatione hic sicut pseudovarietatem convenit.

Lobatchewsky et Riemann et eorum respectivae Geometriae citantur, quae quibusdam propositionibus euclideis contradicunt, quia propositio vero characteristica, quae ab invicem ad diversas Geometrias impellet, illa, quae summam angulorum trianguli respicit, quae summa in Geometria Euclidis, Lobatchewsky et Riemann respective aequat vel non attingit vel duos rectos excedit a mathematico comparata est.

Verumtamen Geometria velut theoria circa quaedam materiae proprietatis adducitur, scilicet legibus obnoxia omnis spatii cognitio quae soli intuitioni relicienda est invitatur[1].

Igitur extensum euclideum dicitur illud de quo quintum postulatum ex unicae parallelae existentia ad datam rectam per punctum extra rectam valet.

In quo hoc non facturum est, non euclideum extensum et si duae parallelae verificari possunt, hyperbolicum extensum (Lobatchewsky, Bolyai), sed si nulla ellipticum extensum (Riemann) habemus[2].

Quaedam expositio de non euclidea Geometria, quae relativitatis rationibus affirmare novam geometriam, nobis necessaria est ut ipsis philosophicis quaestionibus respondebimus et recte sententias philosophicas a relativitatis theoria secernere,velimus. Ea quae geometriam de suis objectis (punctis, lineis, superficiebus, de eorum relationibus mutuis) et de formis figurarum sicut formale

[1] Cf. R. MONTGOMERY, *A Tour of Subriemannian Geometries, their Geodesics and Applications*, Providence: American Mathematical Society, 2002, pp. 147-187.

[2] Cf. PH. SELVAGGI, *Cosmologia*, editio secunda, Romae: apud Aedes Universitatis Gregorianae, 1962, p. 43.

continuum contendit. De rectitudine lineae, de aequalitate vel proportionibus figurarum Geometria sub modo continui loquenda est.

Data autem sensitiva, a quibus Geometria classica suam originem deducit, non hanc exactitudinem habent.

Nec sensus nec imaginatio percipere puncta et lineas possunt, sed tantum corpora extensa secundum tres (saltem secundum duas) dimensiones.

Non distinguere lineas tenuiter a rectis incurvatas possunt. Consequenter nunquam decidere, lineam rectam datam esse, volumus. Aequalitatem inter duas lineas vel superficies percipere, sed non exacte idem dicendum esse de proportionibus, poterunt. Ea quae valde distant, tamen Geometria de extensis agit, quae in infinitum et continuum extenduntur et percipi non possunt.

Si igitur Geometria in origine sua a datis sensitivis lata sit, quomodo hic transitus ad continui exactitudinem adaequatam explicari potest?

1. De quinto euclideo postulato

1.1 - Assertioni de unica recta parallela postulatum quintum aequivalet, dummodo postulatum secundum de infinitudine rectae praesupponatur. Tamen data quadam recta —r— et eius parallela —p— per punctum P, ita ut anguli interni bini duos rectos aequent, nulla alia distincta recta —*p'*—describi, per P nisi internus quidam angulus innimatus est, potest.

Igitur admisso euclideo postulato, recta *p'*, sufficienter protracta necessario secat[3].

Etenim postulatum quintum euclideum exhibere complexitatem quandam patendum est, ita ut potius cuiusdam theorematis enunciatum per comprobandi ratiocinium videatur.

Sed, si quis demonstrationem aggrediatur, facile tamquam ad argumentum ad unam vel aliam ex propositionibus, quae sua vice ex postulato hac ratione manifesta erit petitio principii deducuntur iterum, appellabit. Euclides ipse, persentiens defectum, pro viribus ceteras propositiones statuere independenter a quinto postulato conatus est.

Sed revera aliam propositionem aequivalentem postulato euclideo introduxerunt, quae scilicet maiori evidentia et quae gaudet ut postulatum adducebatur.

Si systema geometricum connexum haberi potest in quo non postulatum euclideum valeat, in ipso assignari figuras similes nequeunt nisi aequales erint, sed nexus interfigurae magnitudinem viget et angulorum amplitudinem esse, ut in sphaerae Geometria contingit: triangulus sphericus, cuius anguli A, B, C definiti sint, complete determinatus est et non nisi cum area determinata verificari potest:

$$\Delta = r^2(A+B+C-r)$$

Verumtamen coefficiens r spherae radius sit summa algebraica: $A+B+C-r$. Angulorum supra r excessus facturus est. Quod si trianguli magnitudo augitur anguli ipsi variantur, et eorum summa, usque ad maximum limitem definitur,

[3] Cf. W. R. KNORR, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Basel: Birkhäuser, 1986, pp. 102-137.

qui verificatur, cum ad eundem maximum circulum tres trianguli spherici vertices, ita ut respectivus triangulus ipsa sphera fiat dimidia, spectent[4]:

$$\Delta = r^2(3\pi - \pi) = 2\pi r^2.$$

Aliis verbis si non euclidea propositio non erat, quaedam accurata dimensio datur, quae relationem analyticam habet cum figurarum forma quae, si tanquam unitas mensurae eligatur, peculiarem ipsis formulis analyticis et simplicitatem Geometria mathematicum docebit[5].

Ita si radius —r— spherae eligatur ut unitaria mensura, area cuiuslibit trianguli spherici per excessum angulorum respectivum supra π, sed trianguli area spherici maximi simpliciter per 2π exprimitur numerum, factura erit.

1.2 - Apud gnoseologiam conditio necessaria et sufficiens ut Euclidis postulatum haec erit ut planus ita ferre supra seipsum possit, iuxta duas directiones, ut plani singula puncta respective duo systemata traiectoriarum orthogonalium inter se describunt[6].

Secundum Lobatchewsky Geometriam, de binis parallelis rectis habemus. Sicut linea recta data —r— et puncto ipsi externo P binae distinctae parallelae rectae p sunt. Iterum per punctum P describuntur, quae rectam priorem —r— numquam secant, quamvis ipsam magis appropinquaverint.

Vero lineae rectae non secantes alicubi segmentum orthogonale commune, quod minimam distantiam inter duas rectas constituit, tenent[7].

Per hanc Geometriam hyperbolicam, angulus quem linea parallela, cum segmento orthogonali rectae —r— minor quam rectus angulus sit, efformat, et est diversus pro diversa distantia puncti P a recta —r—. Talis angulus ad angulum rectum, cum P indefinite appropinquet, tendit, ad angulum nullum appropinquavit cum P indefinite ab —r— recedit, in quo casu ex recta assignata —r— et ex duabus parallelis p_1 et p_2 triangulus, cuius anguli nulli sunt et cuius vertices abdistant invicem, resultat.

In plano igitur hyperbolico utique describi duo systemata linearum orthogonalium inter se possunt. Ut complexus traiectoriarum quas puncta plani simul percurrant et est complexus illarum linearum aequidistantium, quae non rectae sunt, unum tantum habere factum est[8]. Omnes superficies pseudosphericae necessario quibusdam cuspidibus, quare illimitata statui correspondentia inter puncta pseudospherae et puncta plani hyperbolici nequit, limitantur.

2. Apud riemaniannam Geometriam

2.1 - Ut superficies spherica imaginem hyperbolici plani alii exhibeat et accipienda est cum limitatione, excludenda sunt, enim puncta ex opposita diametro, secus duo puncta superficiei non semper unisquam geodesicam determinarunt. Sed in hac Geometria respectivarum superficiarum curvatura in sphera erit $+1/r^2$. Atqui per externum punctum parallelae nulla parallela latura erit.

[4] Cf. J. L. MARQUES BARBOSA, *Geometria Euclideana Plana*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000, pp. 72-88.

[5] Cf. R. FENN, *Geometry*, translated from the German, Berlin: Springer-Verlag, 1989, pp. 63-89.

[6] Cf. P. M. COHN, *Solid Geometry*, London: Routledge and Kegan, 1961, pp. 15-29.

[7] Cf. P. ANDREEV - E. SHUVALOVA, *Geometry*, translated from the Russian, Moscow: Mir Publishers, 1974, pp. 96-100.

[8] Cf. S. SHEN-CHERN et alt., *Riemann-Finsler Geometry*, New Jersey: World Scientific, 2005, pp. 87-104.

Secundum fundamentalem dimensionem, figurae similes, et trianguli angulorum excessus scriptus esset cum E>0, $A+B+C>\pi$ habendus sit maximum valorem et in limitibus et ad Saccheri et Lambert hypothesem erit: $\alpha>90^{o}$, quod ellypticam Geometriam appellatur in hoc Universo, non dantur. Verumtamen plani ellyptici trigonometria iisdem formulis ac trigonometria spherica in euclidea Geometria disceret.

Nova Geometria (Riemann) extensionem secundariam quantitatis formalis, quia haec Geometria a metrica euclidei fuit comparata, tulit. Late re accuratam axiomatis veritatem secundum Geometriae gnoseologiam exprimitur[9].

Sed haec nova geometria geodesicas mathematicum usque ad riemanniam ellypticam figuram docet, generalem geodesicae relativitatem tollere:

$$ds^2 = g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k$$

In philosophiam relativitatis apud einsteinianam expressionem gravitas curvaturae spatii-temporis effectum ostendit. Enim ad newtonianam theoriam gravitatis, sicut potentiam prout in potentia, quia hoc phaenomenum spatii-temporis ad non euclideam metricam patefacit[10].

Enim generalis relativitas spatii-temporis absolutam connexionem apud riemannianam Geometriam docuit nos. Apud relativitatis aequationes, secundum novam metricam, spatii-temporis entitas a tensoriali calculo scriptura erit[11].

Hucusque linearis elementi expressiones ad planum et ad superficies curvas spatii euclidei relatae sunt, sed res etiam ad hypotheticam plana non euclidea extenda est.

Plana enim ellyptica aliter concipi nequeunt quam ut isometricae superficies respectu spherarum et pseudospherarum, quare linearia elementa nuper scripta, proprietates spherae metricas et pseudospherae, etiam respective ellyptico et hyperbolico, tribuenda sunt.

Deinde lineae coordinatae definiendas sunt: alterum systema omnes geodeticas orthogonales uni eidemque geodeticae $u=0$ complectitur et alterum systema lineas priori orthogonales colitur.

Igitur coordinatae ipsae sunt geodetici arcus —u— prioris systematis sunt, et arcus geodeticus ubi geodeticae pertinens $u=0$.[12]

Elementum lineare, quod metricae plani proprietates ellyptici est, appellatur:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{R}\, dv^2.$$

Vero proprietates hyperbolici plani referendae erint:

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\frac{u}{R}\, dv^2.$$

Haec expressio ad causum euclideum, si R fit infinitum, reducitur. Tunc enim angulus u/R nullus fit et cosinus relativus, sive ellypticus sive hyperboli-

[9] Cf. J. R. SMART, *Modern Geometry*, New York: Cole Publishing Company, 1987, pp. 25-27.

[10] Cf. V. I. ARNOL, *Métodos Matemáticos da Mêcanica Clássica*, tradução do russo, Moscovo: Mir, 1987, pp. 9-55.

[11] Cf. W. G. DIXON, *Special Relativity*, New York: Cambridge University Press, 1978, pp. 243-245.

[12] Cf. H. MESCHKOWSKI, *Non Euclidean Geometry*, New York: Academic Press, 1964, pp. 89-97.

cus unitarius facturus erit, quare resultat[13]:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \ .$$

2.2 - Ex eo quod metrica non euclidea quamdam curvaturam fert, fortasse iam ut definitum quaestionem de possibilitate plani non euclidei habetur. Sicut enim propositionum non euclidearum relationes metricas nisi in superficiebus curvatura praediditis verificari non posse, quae non superficies geodesicas constituunt, dum planum euclideum hypotheticum superficies geodesicae supponendus erat[14].

Curvatura enim quae hypotheticis planis non euclideis agnoscenda est, tantum ut analytica functio referens proportionem inter excessum et aream triangulorum appellaturus est.

Si vero huiusmodi radius spherarum ipse valor —a— est, tunc geodesica superficies cum sphera fundamentali coincidit, si enim radius infinitus fit, superficies geodesicae plana tulerunt quae per centrum spherae —a— transeunt et quae, ut in punctis infinito distantibus clausa, habenda sunt[15].

Cum curvatura cuiuslibet geodesicae superficiei sit ubique eadem et valet secundum ellypticam metricam $+1/R^2$, quare nostrae spherae, pro speciali metrica statuta, imaginem ellyptici plani exhibent[16].

Quod maxime notandum est, spherae superficies geodesicae respectu quorumlibet suorum punctorum, quia linea geodesica superficiei constituitur quodam circulo, qui spheram fundamentalem in punctis e diametro oppositis secat.

Secundum riemannianam Geometriam, ut linea geodesicae, hac ratione obtruncatae, ut clausae in seipsas habeantur eorum extrema velut imago duplicata unius eiusdemque puncti spatii ellyptici, si superficies cilindrica apparietur iuxta generatricem lineam et applicetur plano, eadem generatrix bis in plano describitur, etiam habenda sunt.

Naturaliter in plano ellyptico transitus fieri potest e una in alteram partem cuiusque geodesicae, quin ipsa geodesica secatur, consequenter planum ellypticum, si secetur iuxta lineam non suam connexionem amittit et una superficies manet, haec proprietas etiam in noto "anulo Moebius" verificatur. Sicut ellypticum planum, propter peculiarem suam connexionem, hoc etiam habet ut non separet ellypticum spatium in duas partes, quare ellypticum planum superficies unilateralis factum est[17].

De riemanniana Geometria superficies geodesicae spherae sunt quae per originem axium transeunt et earum "curvatura" $+1/r^2$, ut in sphera definitur, constanter secundum aequationem dicitur[18].

[13] Cf. L. M. BLUMENTAHAL, *A Modern view of Geometry*, New York: Dover Publications, 1961, pp. 11-14.

[14] Cf. H. EVES, *Fundamentals of Modern Geometry*, Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1992, pp. 111-119; 152-160.

[15] Cf. E. AGAZZI - D. PALLADINO, *Le Geometrie non Euclideia*, Milano: Mondadori Editrice, 1978, pp. 224-233; 238-244; 258-260.

[16] Cf. P. PUIG ADAM, *Curso de Geometría Métrica*, tomo II, primera edición, Madrid: Técnos, 1948, pp. 74-83.

[17] Cf. J. N. CEDERBERG, *A Course in Modern Geometries*, Berlin: Springer-Verlag, 1995, pp. 65-72.

[18] Cf. H. S. M.COXETER, *Non-Euclidean Geometry*, Toronto: University of Toronto Press, 1968, pp. 109-126.

3. Geometriae hyperbolicae propositiones

3.1 - Independenter ab invicem Geometriam non euclideam Lobatchewsky (1793-1856) et Bolyai (1802-1860) fundant correspondentes hypothesi de acuto angulo. Cum nullum eruere absurdum potuerint ex hypothesi non euclidea, systematice evolvunt independenter Geome-triam a quinto postulato euclideo[19].

Suam Geometriam Lobatchewsky evolvit, quam imaginariam, usque ad trigonometriam et formulam ad computandas longitudines, areae et volumina denominavit. Sicut in qua absurdum evolutione quodlibet non solum deductum non est, sed positive excludendum ex argumento quod non sine acumine primus videbatur. Taurinus perfecit cum formulae trigonometriae imaginariae seu pseudosphericae seu sphericae logaritmo ab ipsis formulis sphericae trigonometricae obtinentur, si spherae radio —r— imaginarius numerus substituitur[20].

Si interna contradictio in non euclideo systemate esset, tunc eadem contradictio in trigonometria spherica vigeret et rursus in ipsa spatii euclidei Geometria vigeret, quia spherica trigonometria nisi Geometria cuiusdem in ipso spatio euclideo particularis superficiei non est[21].

3.2 - Saccheri (1667-1733) et omnes qui postulatum quintum Euclidis esse necessarium, unam Geometriam euclideam esse veram suam sententiam defendentes abtracto ratiocinio iudicaverunt formaliter, contenderant.

Secundum Geometriae philosophiam, vero fundatores non euclideae Geometriae, omnes Geometrias veras ut pariter habuerunt, sub logico respectu, utpote carentes contradictionibus; nec geometriam euclideam anteponendam geometriae non euclideae esse propter mere rationalia argumenta putaverunt[22].

Pro diversa resultanti summa sententia definitiva ferenda ipsis videbatur. Si mensurae summam illam non attingere duos rectos revelassent, Geometria hyperbolica, ut vera retinenda erat, tanquam omnibus phantasmatibus praeiudiciis, quae exhibere absolute euclideas necessarias propositiones videntur.

Vero in hyperbolica hypothesi angulorum defectum proportionaliter cum area augeatur, trianguli extensi considerandi erant: sicut angulos trianguli astronomici e parallasis definitivi dimetitus est stellarum[23].

Quo iure iudicium de veritate Geometrica experimentis physicis committere liceat. Interim tentamina illa experimentalia silentio praeter mittenda non erant, tum ad referendam Geometriae non euclideae historiam, tum ad habendas propensiones prae oculis investigationibus scientificis incertae sunt.

[19] Cf. W. SZMIELEW, *From Affine to Euclidean Geometry*, translated from the Polish, Dordrecht-Boston: D. Reidel, 1983, pp. 161-183.

[20] Cf. R. BENEDETTI - C. PETRONIO, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Berlin: Springer-Verlag, 1991, pp. 2-26.

[21] Cf. B. DOUBROVINE et alt., *Géométrie Contemporaine*, traduit du Russe, Moscou: Éditions Mir, 1987, pp. 30-36.

[22] Cf. R. HARTSHORNE, *Geometry: Euclid and beyond*, Berlin: Springer-Verlag, 2000, pp. 7-25.

[23] Cf. D. HILBERT - S. COHN-VOSSEN, *Geometry and the imagination*, translated from the German, New York: Chelsea Publishing Company, 1983, pp. 11-19.

4. Geometria e gnoseologia ad ontologiam

4.1 - Iterum a gnoseologia cum nova Geometria ellyptica (Riemann) cognitionis sententia progressiva *a posteriori* determinatur euclideam Geometriam a metrica extensione proficisci. Sed euclidea Geometria, sicut gnoseologicam esse, novum analyticum iudicium secundum neopositivismum ostendebat. Sed, secundum mathematicae ontologiam, continuum formale, quod a Geometria exprimitur, ex indivisibilibus elementis (lineis, punctis et reliqua) non componitur.

Motus puncti, ut saepe Geometriae dicunt, generat lineam et formalis realitas huius puncti ex contactu globi perfecti cum plano perfecto demonstretur. Sed in motu puncti nisi indivisibile, ipsum punctum scilicet non adest.

Quantitas externa sive localis vel quantitas in actu secundo seu actualis in hoc consistit, quod partes extra invicem in spatio vel loco positae sunt, ut formalis Geometriae objectum sit. Propterea etiam extrapositio partium in loco reali vel ideali vocatur. Sicut a Geometria dicitur, localis quantitas plerumque simpliciter sine tempore, quantitas sive extensio de punctis, lineis, et spheris loquitur. Philosophice Geometriae elementa in quantitate fundantur et rationes de eorum principiis sumptunt. Ergo formaliter quantitas localis plerumque simpliciter quantitas sive extensio dicitur.

E geometriae (quantitate locali) aliae corporis proprietates sequuntur, quae etiam proprietates quantitatis localis vocari possunt: divisibilitas seu aptitudo corporis localiter extensi, ut a partibus dividatur mensurabilitas sive aptitudo, ut eius dimensiones mensurentur[24].

Quantitas autem externa sive localis ad modum proprietatis substantiae inhaerentis concipitur, quia per eam fit, ut partes extra invicem in loco positae sint.

Geometria in kantianum idealismum a pura intuitione *a priori* aedificatur ut haec scilicet ad puros conceptos unitatis, multiplicitatis totalitatisque producet. Formae iudicativae (Kant) ad puram spatii (Geometriae) intuitionem impellent. Ut Geometria phaenomeni indicationis commendet, certiorem axiomatis intellecti a quantitate abstracta (unitate, totalitate et multiplicitate) facienda sit.

Apud kantianam theoriam syntheticum iudicium *a priori* in Geometria valet, sicut intuitio *a priori* pura e Geometria definitur. Nam in kantiana theoria extensio in ente a se, nobis ignoto, sed tantum in ente phaenomenali, nom invenitur; quod non habet esse, nisi in cognitione nostra sensitiva. Sed iuxta hunc modum essendi extensum exactitudine limitum caret.

Ergo exacta Geometriae cognitio nullibi applicationem inveniret: non in ente a se, quia extensione caret, non in ente phaenomenali, quia exactitudine caret.

4.2 - Apud ontologiam, Geometria ad abstractam quantitatem spectat, sed haud difficile intellegimus, non esse penitus idem in mentis conceptione: corpus partes integrantes habere et has partes formales in spatio difusas seu unam extra aliam positas in Geometria esse.

Quantitas autem externa sive localis ad modum proprietatis substantiae ab himis concipitur, quia per eam fit, ut partes extra invicem in loco positae sint.

[24] Cf. J. DONAT, SJ, *Cosmologia*, editio sexta, Oeniponte: Typis et sumptibus Feliciani Rauch, 1929, pp. 22-23.

Sicut a Geometria dictum est, enim extensionem localem esse constantem localem esse constantiae corporeae eiusque naturale complementum, omnis autem substantia exigentiam habet proprietatis suae, cernimus.

Ergo etiam substantia corporea extensionem localem exigit, propter compositionem ex partibus integrantibus, quibus naturale est, ut non intra invicem constringantur, sed una extra aliam expandantur[25].

Idcirco puncta, lineae, plana, secundum novam Geometriam (diferentialem et analyticam), sunt partes continui. In continuo puncta, lineas, superficies seu plana, puncta tamquam aliquid materiae, quod nullam dimensionem habeat, lineas tamquam aliquid materiae, quod una plana sit, quae duas tantum habeant dimensiones, concipere solemus. Continuum enim sicut reapse exsist, necessario in tres dimensiones extensum est et, quia extensum divisibile est, etiam in tres dimensiones divisibile est. Quaecumque igitur pars in continuo assignatur, in tres dimensiones extensa et divisibilis est.

Puncta, autem, lineae, plana in unam vel plures dimensiones extensae et divisibles sunt.

In continuo concipere solemus puncta, lineas, superficies seu plana, puncta tamquam aliquid materiae, quod nullam dimensionem habeat, lineas tamquam aliquid materiae, quod unam, plana, quae duas tantum dimensiones habeant.

Geometria aliquo modo illustrari potest ex consideratione diversitatis inter circumferentiam involventem et involutam. Nam, cum radice, communes possint tangere puncta consecutiva circumferentiae exterioris et necessario transire debeant per diversa puncta circumferentiae interioris, duae circumferentiae sequales esse deberent. Idem relate diagonalem et basim alicujus quadrilateri dicendum esset. Haec tamen consideratio Geometriae tantum valet in hypothesi numeri finiti punctorum; non autem si puncta supponuntur actu infinita[26].

4.3 - Extensio non solum divisibilitatis radix, sed etiam, sicut externa, corporum extensio Geometriae fundamentum est, ut ab abstractione corporum formae externae factae sint.

Cum ab externae materiae abstractione de sensibus usque ad intellectum Geometria appelletur.

Illustratio geometrica hoc modo dari potest: recta AB indefinita et parallela rectae A'B' sit et recta CD continua facta sit, sicut in figura scriptum est:

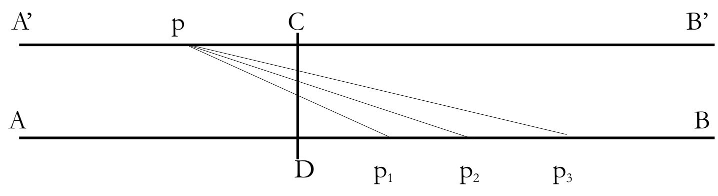


Diagrama 1

[25] Cf. J. VON NEUMAN, *Continuous Geometry*, New Jersey: Princeton, 1969, pp. 1-8.
[26] Cf. P. SUPPES (editor), *Space, Time and Geometry*, Dordrecht: D. Reidel, 1975, pp. 260-295.

In recta AB puncta indefinita p_1, p_2, p_3, …, p_n, et uniantur cum puncto P, sumantur[27].

Rectae, quae punctum P cum p_1, p_2, p_3, …, p_n uniunt, continuum CD in partibus semper magis ac magis superioribus, nunquam tamen attingunt lineam C, tangunt. Ergo continuum CD sine fine divisibile est et quidem quamvis continuum definitum (et non indefinitum ut recta AB) sit.

Etiam hic de argumento proprie dicto, neque pro ipso continuo mathematico, non agitur.

Nam hypothesis, scilicet, rectam CD esse vere continuam et ideo compositam ex divisibilibus (quam densitas afirmavit apud mathematicae proprietates ac Geometriae) negari poterit quatenus argumentis mere mathematicis non videtur probari posse, quia novam ac extensivam Geometriam (Riemann et Lobatschewski) ab abstractiva generalisatione inferimus.

Unde, si recta CD ex indivisibilibus actu infinitis, tantum argumentis mathematicis excludi non potest, componeretur, vel recta P punctum C tangeret, vel ratio cur punctum C non attingeretur impossibilitas exhauriendi numerum actu infinitum et non ipsa divisibilitas sine fine esset[28].

Etenim aiunt ut linea ex punctis componitur et aliae superficiei factae sunt. Si praeter illud indivisibile, punctum continuum quoddam extensum motum adesse, in Geometria, quia remotum fundamentum ontologicum in motu referatur, animadvertimus.

Sicut motus collectio stationum puncti non est, sic linea vel punctum generatae per motum punctorum collectio non erit et eius extensio punctis sed continuitati motus non tribuenda est[29].

4.4 - In Geometria ontologice linea per punctum describitur, atqui punctum signare nisi punctum non potest. A Geometria, per abstractione et generalisatione, punctum nonnisi punctum signat, respondetur. Idcirco motus cessat, sed in motu punctum lineam per externam extensionem motus describitur.

Naturaliter, ad Geometriam motus remotam radicem apparuit, cum externa extensio in formali continuo proximum fundamentum semper ontologice ostendet.

Apud ontologiam, ut hunc intellectum inveniamus, non incipimus a puncto, sed ab eo quod in tota hac materia primum datum est: ab ente extenso ut extensum est, non solum a parvo corpore, sed etiam a corpore cuiusvis magnitudinis; ab ente extenso, quod statim, sive extensum secundum tres dimensiones, sive solidum, revelabit.

Primum proprium quod in ente extenso, intuitu intellectus inspicientis phantasma, statim detegimus, est eius divisibilitas, partes ne moveantur, ne ab invicem separantur[30].

Nunc partes relate ad invicem limitatae sunt. Sed hucusque hoc sensu tantum existit limes inter eas. Iterum per limitem posse fieri transitum ab una parte in aliam clarum est.

[27] Cf. J. L. MARQUES BARBOSA, *Geometria Euclideana Plana*, Rio de Janeiro: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2000, pp. 30-45.

[28] Cf. S. LIPSCHUTX, *Álgebra Linear*, tradução do inglês, S. Paulo: Mc Graw-Hill, 1972, pp. 308-312.

[29] Cf. A. HOLME, *Geometry: our cultural heritage*, Berlin: Springer-Verlag, 2002, pp. 67-69.

[30] Cf. J. CLEGG, *Calculus of Variations*, London: Olivier and Boyd, 1968, pp. 123-143.

Et, transitum fieri in indivisibili, bene attendamus. Hoc non clarum imaginationi est, quae indivisibile percipere non potest, sed clarum intellectui est. Hic verumtamen limes inter partes, ut transitum praebens, indivisibilem ferre.

Hic igitur limes est superficies et describi potest: id per quod fit transitus ab una parte in aliam, et tunc in respectu sub quo per id fit transitus, est indivisibilis. Et ita primum indivisibile ex exacta Geometria in phantasmate intellective invenimus, in quo haec exactitudo et nunc cognoscitur.

Eadem certitudine id invenimus, qua in eodem phantasmate entis extensi necessitatem eius divisibilitatis legebamus.

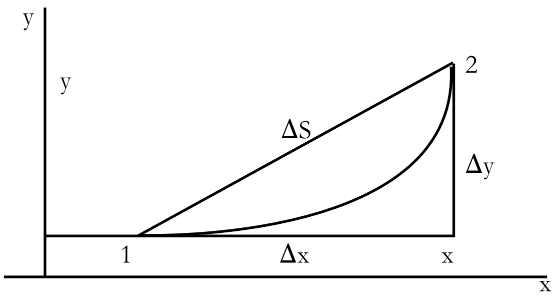
Si in actu, tum necessitatem tum primi huius indicii geometrici attingimus exactitudinem Geometriae, attendimus, quamquam ne necessitas nec in cognitione sensitiva exactitudo continui formalis adest.

Ergo limes indivisibilis existit, id per quod transitus fit, in extenso ente et actu per eius divisionem oritur. Autem hic limes superficiem factus est, id in quod aspiciendo limitatum corpus inspicimus. Non utique est superficies plana, immo nec polita, sed ut limes ubique est indivisibilis.

Secundum latitudinem et longitudinem, clare nobis ut extensa res divisibilem ostendit, sicut figura Geometriae in duabus dimensionibus referatur:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$



$$v = \frac{x}{y} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S = \Delta x \cdot \hat{x} + \Delta y \cdot \hat{y}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \hat{x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \hat{y}$$

Limes inter partes superficiei iterum, id per quod fit transitus ab una parte in aliam superficiei, est. Hic transitus iterum in indivisibili fit. Hic limes, indivisibilis ut limes, sive curva sive alia, lineam tulit[31].

Linea sub alio respectu extensam valet et divisibilem. Ex eius divisione punctum oritur, quod lineae limes est, per quod transitus ex una parte lineae in aliam fit, iterum in indivisibili. Sed nunc tandem aliquando hic divisionis processus

[31] Cf. J. W. KANE - M. M. STERNHEIM, *Physics*, third edition, New York: John Wile and Sons, 1988, pp. 33-34.

finem habet. Pervenimus ad id quod est omni ex indivisibili parte: geometricum punctum ad id quod ab Euclide describebatur[32].

Est limes lineae, quae superficiei limes est, quae entis limes extensi originarii est, immediate nobis dati experientia externa. Quia punctum talis limes est, ideo non tantum est quid indivisibile, sed est indivisibile positionem habens, quae apud S. Thomam definitio est.

De existentia mathematica horum limitum constat et in potentia intra ens extensum non divisum existunt. Sed actu per divisionem entis extensi existunt. Et quidem primo superficies oritur, seu línea, seu punctum. Necessario haec ex natura extensi entis, ut extensum est, sequuntur. Corpora limitata et horum limitem habemus. Non utique opus est, ut geometrice simplex superficies sit: planum, superficies et ita posso.

Forte ea quae in rerum natura inveniuntur, ut geometricum nomen non habeant. Naturaliter forte formas valde complicatas habent, forte vehementer sunt, modo tam microscopico, ut id experientia detegi non possit. Sed veri nominis superficies sunt, quae corpora limitant, transitus per hos limites, ex hoc corpore indivisibili non fit.

Omnia corpora limitari per superficies possunt, quae sicut globi limes perfecti sunt. Ecce haec superficies quidem finita est, sed non limitata factura sit. Est ipsa limes, scilicet corporis globi limes, sed in se limitem, qui divideam, non habet. Si ontologice omnia corpora ita limitata essent, non existeret de facto linea in rerum natura. Sed mathematice ut extensae sunt, illae superficies divisionem admittunt et, si adest, utique de facto lineae erunt[33].

Sed limes, qui effectus tertiae divisionis est, iam non potest huic operationi subiecti, est omni ex parte indivisibilis, est punctum geometricum. Ecce id quod clare intuitu intellectivo in phantasmate nostro intuemur.

Id limes punctum est, linea est quae extensa secundum unam dimensionem est. Id limes linea est, extensum secundum duas dimensiones est, superficies erit. Scilicet limes eius superficies est, quod extensum originarie datum est, extensum secundum tres dimensiones erit.

Locuta est Geometria de diversis dimensionibus, naturaliter formale objectum Geometriae continuum spatii e tribus dimensionibus, usque ad quartem, patefacit.

4.5 - Pro generali cognitionis theoria, in extenso ente, ut extensum est, limites dari possunt, qui ut indivisibilis limes sunt. Hoc proprium non a cognitione sensitiva, quippe quae hac exactitudine dimensionis caret, attingitur. De extenso ente, prout esse habet in ipsa cognitione sensitiva, sive externa sive interna, haec exactitudo dimensionis non affirmari protest.

Exactitudo dimensionis, quae intellectu est, tantum affirmari potest et debit de ente extenso, prout esse in se habet, in realitate et ibi necessario affirmanda est.

Igitur ex datis sensitivis iudicium intellectivum de limitum indivisibilitate hauritur. Sed id quod iudicium affirmat, non de extensis affirmat, prout esse in illis datis sensitivis habent, sed de ipsis extensis, prout a se esse habent. Id in gene-

[32] Cf. H. EVES, *Fundamentals of Modern Elementary Geometry*, Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1992, pp. 152-156.

[33] Cf. Y. SIMON, *Relativité Restreinte, cours and applications*, Paris: Vuibert, 2004, pp. 231-246.

re de omni cognitione affirmandum est et dicendum: phantasmate indigemus, ut ideas abstrahamus et iudicemus, sed id quod primo cognoscimus, non est phantasma sed res, id quod affirmatur, non de phantasmate dicitur, sed de re[34].

Et ex tali reflexione, id quod dicebamus, resultat, in ipso phantasmate, et in sensibilitate in genere, non dimensionis adest, quae in iudicio intellectus de limite entis extensi affirmatur.

Quidquid mathematicos Geometriam docebit, e metrica ad analyticam, extensum considerari, ut collectio punctorum ex quorum additione vel positione habet originem, non potest. Verumtamen considerari ut potentia poterit, ex qua et in qua infinitum puncta parerent. Saepius in expositionibus mathematicis extensa vel geometriae figurae prout collectiones punctorum describuntur.

Talis formula relationem ad formale continuum, quae inter coordinatas, fert. Carthesii erit, quae puncta, quae sita sint, sicut a linea determinent in conicae aequationibus:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2;$$

$$x^2 = 4py\ ;$$

$$y^2 = 4px.$$

Haec linea, si definita est, erit locus classicus horum punctorum, quae determinatam proprietatem habent et haec qualitas a geometriae formula definitur. Si ipsa formula ad definitionem lineae adhibetur, tunc periculum, ne linea consideretur, sicut collectio punctorum incorrecto sensu esse potest.

Atqui trigonometriae aequationes y=sen x et y=cos x determinant puncta quorum ordinata y per formulam indicatam calculari electo valore arbitrario abscissae x potest. Singulis abscissis correspondet una ordinata, tamen electa una abscissa, determinata est ordinata et consequenter punctum determinatum est[35].

Abscissae —x— variatio continua in Geometria, quae non nise per motum habere potest, non per succesivam electionem valorum determinatorum, tribuitur.

Igitur linea perpendicularis abscissarum axi ita motu continuo moveatur, secundum determinatam legem et a solo tempore, sicut in classicam cinematicam, tamquam variabile independente dependeat:

$$s = v \cdot f(t).$$ [36]

In ipsa ista linea punctum moveatur, iterum continuo motu, qui sua lege determinatur et a solo eodem tempore dependet.

Ex compositione horum motuum motus continuus resultat, qui lineam generat, cuius aequatio inveniri potest per eliminationem variabilis t ex duabus aequationibus:

[34] Cf. H. GLEITMAN, *Psicologia*, tradução do inglês, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002, pp. 371-381.

[35] Cf. N. PISLOUNOV, *Cálculo Diferencial e Integral*, volume I, tradução do russo, Porto: Edições Lopes da Silva, 1983, pp. 337-347.

[36] Cf. J. ARAÚJO MOREIRA, *Física Básica para aplicações médicas e biológicas*, 3ª edição, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980, pp.119-123.

$$x=f(t) \text{ et } y=F(t).$$

Et sensus geometricus nunc est, quia linea ordinatarum movetur. Ergo proximum ontologicum fundamentum Geometriae formale continuum extensum factum ultimum motus est.

Conclusio

Etenim inter alia primatum extensum euclidianum habet, quia solum et fundamentum in newtoniana gravitatione valere solet[37].

Atqui newtoniana sententia rationi metrica ex euclidea Geometria oboedit, cum riemanniana Geometria in generali relativitate, sicut einsteineana opinione dicitur, facta sit.

Extensio enim pura, secundum Geometriam, nulla singulari determinatione qualificata vel figurata, non est indeterminata extensio, sed iam talem formam et determinationem tenet, quae euclideis proprietatibus exprimuntur[38].

Sic simul linea naturalis est ad quem ellyptica et hyperbolica extensio tendunt, quando eorum curvatura ad nihilum reducitur.

Apud hanc non euclideanam Geometriam (Riemann-ellypticum extensum), nova gravitationis physica patefacta fuit[39].

Verumtamen ad relationes Geometriae et generalis relativitatis, in philosophiam, Einstein dicitur ut veritatis conceptus ad assertionem purae Geometriae non spectat, quia attributum verum conformitatem cum objecto reali denotet. Autem Geometriae conceptus ad experientiae objecta non est referre, sed tantum ipsos conceptos logicos cohaerenti nexu componere[40].

Riemann a hypothesi satis generali de modo simpliciter proficiscitur. Expressio quadrati elementaris intervali a riemanniana sententia assumendus est sub quadratica determinatione per variabilium qualificationem[41].

Recipiendus est in superpositionis principio figurarum demonstratur quae functiones metricae talem naturam habent. Sed id quod est K gaussiani concepti generatim exponitur a Riemann et qui spatii curvaturam appellavit[42].

A Geometriae gnoseologia exponitur spatii et motus principia, sicut postulatum quo recta linea comparata erit, secundum duo puntas, cum tres Geometriae formas invenientur. Scilicet riemanniana Geometria positivam curvaturam determinat[43].

Naturaliter Geometriae fundamentum in physica semper ad motum realitatis implicatum est et necessaria conditio sub philosophico aspectu. Geometriae formalitas essentiam spatii aufert et haurit eius philosophicum fundamentum.k

✠

[37] Cf. I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, critica editio, Stuttgart: Frommann-Verlag, 1964, pp. 120-121.

[38] Cf. E. BOREL, *Space and Time*, English translation, New York: Dover Publications, 2003, p. 38.

[39] Cf. H. A. ATWATER, *Introduction to general Relativity*, Oxford: Pergamon Press, 1974, pp.136-159.

[40] Cf. A. HELD (editor), *General Relativity and Gravitation*, New York: Plenum Press, 1996, pp. 71-93.

[41] Cf. W. KINGERBERG, *Riemannian Geometry*, Berlin: W. de Gruyter, 1982, pp. 78-109.

[42] Cf. G. A. JENNINGS, *Modern Geometry with applications*, Berlin: Springer-Verlag, 1997, pp. 1-11.

[43] Cf. R. BONOLA, *Geometrías no euclidianas,* traducción del italiano, Madrid: Espasa-Calpe, 1923, pp. 147-149.