FEDERICO RAFFO QUINTANA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA - CONSEJO NACIONAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS Y TÉCNICAS

APORTES DE LA POLÉMICA WALLIS-HOBBES A LAS DISCUSIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA INFINITA[1]

CONTRIBUTIONS OF THE WALLIS-HOBBES CONTROVERSY TO THE DISCUSSIONS ON THE FOUNDATIONS OF INFINITE MATHEMATICS

federicoraffo@uca.edu.ar

Recepción: 03/09/2021
Aceptación: 29/09/2021

RESUMEN

En este trabajo se abordarán algunos aspectos de la polémica entre Wallis y Hobbes en torno de los fundamentos de la matemática infinita y del uso en general de infinitos e infinitamente pequeños en matemática. Así, luego de algunas aclaraciones iniciales sobre la aritmética de los infinitos de Wallis, nos centraremos en especial en tres ejes de esta discusión: la naturaleza de los infinitesimales y la validez de su uso en matemática; el número infinito y la suposición de lo que llamaremos "completitud de las series"; y concepción de que el "exceso" desaparece llevada la serie al infinito.

PALABRAS CLAVES

Wallis, Hobbes, matemática infinita, aritmética de los infinitos.

ABSTRACT

In this paper we will deal with some aspects of the controversy between Wallis and Hobbes concerning the foundations of infinite mathematics and the use of infinite and infinitely small quantities in mathematics. Thus, after some initial clarification on Wallis's arithmetic of infinities, we will focus particularly on three main topics of this discussion: the nature of infinitesimals and the validity of their use in mathematics; the infinite number and the supposition of what we will call "the completeness of the series"; and the conception that the "excess" disappears, taking the series to infinity.

KEYWORDS

Wallis, Hobbes, infinite mathematics, arithmetic of infinities.

[1] Le agradezco a Oscar Esquisabel por los comentarios y sugerencias a este trabajo.

I. Introducción

En este trabajo buscaremos reconstruir algunos aspectos de la polémica entre John Wallis (1616-1703) y Thomas Hobbes (1588-1679) en torno del uso de conceptos infinitarios en matemática, que mostrarían un "capítulo temprano" de la historia de las discusiones sobre la matemática infinita. En efecto, en la polémica entre Wallis y Hobbes pueden encontrarse algunos argumentos, sea a favor (Wallis) o en contra (Hobbes) del uso de infinitesimales e infinitos, que son concordantes con razonamientos que se dieron posteriormente, a finales del siglo XVII y comienzos del siguiente, en el marco de la polémica en torno de los infinitesimales y del cálculo infinitesimal suscitada luego de la publicación por parte de Leibniz del *Nova methodus pro maximis et minimis* en 1684.[2] No es nuestra intención exhibir estas semejanzas, ni sostener que haya habido una influencia explícita de estos autores en la polémica posterior.[3] Más bien, el objetivo es mostrar que la constancia de la discusión en torno de la matemática infinita, con dos bandos claramente delimitados (por un lado críticos y, por otro, entusiastas de la matemática infinita) en alguna medida representa un aspecto del "espíritu de la época". En este sentido, mostraremos que el desarrollo de la matemática infinita en el siglo XVII tuvo defensores y críticos a lo largo de buena parte del siglo. Dicho de otro modo, si las discusiones sobre los conceptos infinitarios y sobre las técnicas infinitas en la matemática antecedieron varias décadas a las controversias surgidas a partir de la publicación leibniziana de 1684, se sigue que esta polémica en torno del cálculo leibniziano es también un "capítulo" más, en este caso posterior, de la historia sobre el uso y la validez de conceptos infinitarios en matemática.

La extensa y célebre polémica entre Wallis y Hobbes comenzó en la década de 1650 en el marco del tratamiento casi en simultáneo llevado a cabo por estos autores de problemas de cuadraturas. Esta polémica consistió, precisamente, en un intercambio de razones a favor y en contra del uso de conceptos infinitarios en matemática.[4] El abordaje de Wallis tuvo lugar especialmente en el célebre tratado *Arithmetica infinitorum* de 1656 (de aquí en más, *AI*), mientras que Hobbes lo trató inicialmente en el capítulo XX del *De corpore* de 1655, en donde presentó un intento de resolución del problema la cuadratura del círculo (Hobbes, 1665, pp. 170-181). No obstante, la historia de la propuesta de Hobbes es bastante desafortunada.[5] Originalmente, este capítulo no formaba parte del trabajo. Su inclusión es consecuencia del hecho de que Seth Ward, otro adversario de Hobbes, lo había desafiado a que publique sus descubrimientos matemáticos. Cuando el trabajo estaba en prensa, Hobbes le mostró un primer intento de cuadratura a algunos colegas, que le señalaron los errores que contenía. Tras una revisión, decidió modificarle el título: de ser el capítulo sobre la búsqueda de una línea recta igual a la circunferencia del círculo, pasó a

---

[2] Uno de los capítulos más reconocidos de esta polémica tuvo lugar en la Academia de ciencias de París los primeros años del siglo XVIII, que ubicó, por un lado, a matemáticos conocedores y defensores de las técnicas infinitarias leibnizianas, como Varignon o l'Hopital, Johann y Jacob Bernoulli, y, por otro, a críticos de la matemática infinita, como Rolle, Gallois y Nieuwentijt (cf. Joven, 1997).
[3] Puede señalarse, no obstante, que tanto Wallis como Hobbes fueron relevantes para Leibniz, el primer para el desarrollo de la matemática infinita leibniziana y el segundo, en algunas cuestiones y conceptos más bien filosóficos que impactaron en el pensamiento leibniziano de juventud. He abordado algunos aspectos de la influencia de Wallis en Leibniz en trabajos anteriores: Raffo Quintana (2018, pp. 65-73) y Raffo Quintana (2020, pp. 118-148). Véase además Probst (2018, pp. 189-208). A propósito de la influencia de Hobbes en el joven Leibniz, recomendamos el cásico trabajo de Bernstein (1980, pp. 25-37), así como también MacDonald Ross (2007, pp. 19-33).
[4] Para una reconstrucción de la polémica, recomendamos especialmente el trabajo de Jesseph (1999).
[5] Para la reconstrucción de esta historia, seguimos a Jesseph (1999, pp. 125-130).

ser el capítulo sobre *"Una falsa cuadratura del círculo a partir de una hipótesis falsa"* (Hobbes, 1665, p. 170). Hobbes estaba convencido de que el problema de la cuadratura podía ser resuelto mediante los métodos clásicos de la geometría, por lo que introdujo el segundo intento de cuadratura, en el que ya no pretendía obtener una línea recta exacta, sino una mera aproximación. No obstante, este intento también fue defectuoso, por lo que finalmente redactó un tercer intento, que tampoco logró éxito. Hobbes fue consciente de su error sólo cuando la impresión del texto estaba avanzada, por lo que solamente logró añadir un párrafo final en el que advertía que su cuadratura contenía algunos errores. Wallis accedió a una copia de la primera impresión, por lo que pudo reconstruir los intentos de Hobbes. En *Elenchus Geometriae Hobbianae* de 1655, Wallis sintetizó los intentos fallidos de Hobbes y parodió su falta de conocimiento matemático. Esto provocó el enojo de Hobbes, en especial porque Wallis se valió de un escrito privado que, a decir de Hobbes, le robaron de su estudio (Hobbes, 1845a, pp. 323; 361). En consecuencia, se dedicó a cuestionar la matemática de Wallis, dando comienzo a una de las disputas más duras de la época. Esto explica que muchas de las críticas que surgieron a partir del planteo de Wallis fueron propuestas precisamente por Hobbes. No será la intención de este trabajo reconstruir las propuestas de cuadraturas de Wallis y Hobbes, más allá de alguna indicación que hagamos al pasar, sino más bien algunos aspectos de las discusiones teóricas que se suscitaron a partir de ellas.

El trabajo estará ordenado de la siguiente manera. En la sección 1., haremos algunas observaciones sobre el uso por parte de Wallis de infinitos e infinitesimales, que son fundamentales para introducir las discusiones ulteriores. Luego, en la sección 2., abordaremos tres ejes de la polémica: los argumentos (2.1.) relativos a lo infinitamente pequeño; (2.2.) acerca del número infinito y la suposición de completitud de las series; y, por último, (2.3.) sobre la concepción de que el "exceso" desaparece llevada la serie al infinito.

1. Algunos aspectos fundamentales de la matemática infinita de Wallis

En esta sección reconstruiremos algunas ideas centrales de la aritmética de los infinitos de Wallis, que exhibirán el modo de hacer uso de infinitos e infinitamente pequeños en su tratamiento de problemas de cuadraturas. Dado que el aspecto de la polémica entre Wallis y Hobbes que queremos abordar se relaciona con la discusión acerca de los conceptos infinitarios y que Wallis ha hecho uso de ellos precisamente en su *AI*, es menester señalar algunos aspectos relevantes de su abordaje, sin por ello tener que entrar en muchos detalles. Por la misma razón, como señalamos en la introducción, no haremos una reconstrucción integral del método para cuadraturas de Wallis, ni haremos alusión, por cierto, al tratamiento de Hobbes de la cuadratura del círculo, que es geométrico.

En buena medida, la polémica entre Wallis y Hobbes, en lo que atañe la matemática, se apoya en última instancia en diferencias acerca del estatus de la aritmética y de la geometría en relación con los fundamentos de la ciencia matemática. Así, para Wallis, los principios de la geometría se encuentran en la aritmética, lo que implica, en síntesis, que la aritmética es el fundamento de toda la matemática. Esto justifica incluso la posibilidad de reducir un problema geométrico a la aritmética (Wallis, 1656a, s/n, identificada como Aa3), lo que es parte fundamental del método para cuadraturas de Wallis. En *Mathesis universalis* de 1657, Wallis sostuvo que el 'álgebra universal' no es geométrico sino aritmético, de modo que los principios que requieren una explicación no son los de la geometría, sino más bien los de la aritmética:

> En efecto, aunque muchas cosas Geométricas se encuentren o eluciden por principios Algebraicos, sin embargo no por ello se sigue que el Álgebra sea Geométrica ni que se apoye en principios Geométricos (como parecen imaginar quienes proceden de este modo), sino que esto ocurre a causa de la afinidad íntima de la Aritmética y la Geometría, o más bien porque la Geometría está como subordinada a la Aritmética, y por ello aplica las proposiciones Aritméticas universales especialmente a sus cuestiones. (Wallis, 1657, p. 73. Salvo que se indique lo contrario, las traducciones de este trabajo son mías)

En este contexto, Wallis plantea que el infinito y lo infinitesimal están dentro del alcance de la ciencia general de la cantidad, por lo que la aritmética de los infinitos, que, en su visión, es la clave para las investigaciones sobre cuadraturas, es una rama legítima de la matemática (Jesseph, 1999, p. 176). Ahora bien, la concepción de Wallis tuvo algunos adversarios, como, por ejemplo, Isaac Barrow, para quien la aritmética no es la parte fundamental de la matemática, sino la geometría. Incluso, en su visión, el álgebra no es una rama de la matemática, sino solamente un conjunto de reglas de manipulación de signos. De acuerdo con Barrow, la prioridad de la geometría se observa, por ejemplo, en que los números son obtenidos por abstracción de las cantidades continuas y de sus divisiones sucesivas (cf. Mancosu, 1996, pp. 86-87; véase también Jesseph, 1999, pp. 39-40). Hobbes, por su parte, compartió la visión de Barrow en cuanto a la subordinación de la aritmética respecto de la geometría, criticando a Wallis también por haber confundido "el estudio de los *símbolos* con el estudio de la *geometría*", de modo que "pensó que la escritura simbólica es un nuevo tipo de método" (Hobbes, 1845a, p. 187). No obstante, para Hobbes los signos son "andamios de la demostración", cuyo uso debe explicarse correctamente antes de mostrar las demostraciones en las que se utilizan, cosa que, a su decir, Wallis no hizo (Hobbes, 1845a, p. 248).

Desde el punto de vista de los problemas de cuadraturas, la aritmética de los infinitos conlleva la suposición de que las figuras de alguna manera "contienen" un número infinito de infinitesimales. Así, el área de la figura en cuestión sería estimable mediante un cálculo aritmético, esto es, mediante la suma de dichos infinitesimales. Como Wallis considera que la aritmética de los infinitos es una rama legítima de la matemática, no considera que el uso de estas sumas en materia de cuadraturas traiga inconvenientes. En muy pocas palabras, podemos sintetizar el uso de series infinitas por parte de Wallis en los siguientes puntos:

1. A medida que aumenta el número de términos de una serie, obtendremos un resultado cada vez más aproximado o, más bien, decrecerá el "exceso" o diferencia. Para mencionar un ejemplo simple, utilizado por Wallis al comienzo de la *AI*: si formamos una fracción en la que (a) el numerador o antecedente sea la serie de los cuadrados de los números naturales comenzando desde 0, serie finita en cuanto a la cantidad de términos, pero extensible, y (b) el denominador sea una serie que tiene el mismo número de términos que el numerador, todos iguales al mayor de los que figuran en el antecedente, obtendremos por resultado la razón de $\frac{1}{3}$ más un "exceso". Así: (1) $\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, es decir, la suma da $\frac{1}{3}$ más el "exceso" de $\frac{1}{6}$. Pero si aumentamos o extendemos progresivamente el número de términos, el exceso respecto de $\frac{1}{3}$ decrecerá: (2) $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$; (3) $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$; (4) $\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$; (5) $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$; (6) $\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$; y así sucesivamente.

2. Ahora bien, a partir de un número finito de casos, por "inducción" podemos establecer una conclusión universal.[6] En este sentido, Wallis señala: "Pero dado el creciente número de términos, este exceso sobre la tercera parte decrece continuamente, de tal modo que finalmente llega a ser menor que cualquiera asignable (como es evidente); si procede al infinito, desaparecerá totalmente" (Wallis 1656a, p. 16). En consecuencia, si la serie de los cuadrados es *infinita,* entonces la razón que mantiene a la otra serie es la de $\frac{1}{3}$ (es decir, sin exceso alguno).

3. Esto implica que Wallis considera aquí que una serie, sea finita o infinita, tiene un último término l. Por ello, si se supone que la serie es infinita, nos daría no una aproximación ($\frac{1}{3}$ más un exceso), sino más bien una igualdad ($\frac{1}{3}$). En consecuencia, se presume que en las series infinitas de alguna manera están dados "todos" los términos, es decir, del primero al último, y en ese sentido diremos que hay una "suposición de completitud" de la serie.

2. Algunas discusiones en torno al planteo de Wallis

Muy poco tiempo después de que Wallis publicara la AI, Hobbes esgrimió una serie de críticas sobre algunos aspectos de la matemática de Wallis en *Six Lessons to the Savilian Professors of the Mathematics* de 1656. En ese texto, en el que también se defendió de algunas objeciones llevadas a cabo por Wallis en *Elenchus Geometriae Hobbianae*, Hobbes pretende mostrar que su geometría es superior a la de Wallis: "mi geometría es a la tuya como 1 a 0" (Hobbes, 1845a, p. 291). En especial, buscó resaltar que el procedimiento de Wallis carece de bases teóricas sólidas: "Y todo esto procede de no entender los fundamentos de tu profesión", o también: "La razón por la que no has logrado nada en ninguno de tus libros […] es que tú no entiendes qué es *cantidad, línea, superficie, ángulo y proporción*, sin lo que no puedes tener la ciencia de ninguna proposición en geometría" (Hobbes, 1845a, pp. 309-310 y 317). La discusión sobre cómo debe entenderse la noción de proporción (*ratio*) es constante en las primeras cuatro lecciones. No obstante, recién en la quinta lección, Hobbes ataca directamente los resultados de la *AI*. Con esto, comienza una sucesión de escritos en los que los autores intensifican las críticas mutuas, que perdura hasta comienzos de la década de 1670. Analicemos algunos de los ejes de la discusión entre ellos.

2.1. La naturaleza de lo infinitamente pequeño

Como Hobbes creía que el problema de la cuadratura del círculo podía ser resuelto con los procedimientos clásicos de la geometría, el método de Wallis, que se caracteriza por la reducción de la geometría a la aritmética y por el empleo de series infinitas, le pareció ridículo. Incluso, Hobbes señala que, aunque en su propio examen pudo haberse equivocado, "no puede negarse que he usado un método más natural, más geométrico y más perspicaz en la búsqueda de este problema tan difícil que lo que tú has hecho en tu *Arithmetica infinitorum*" (Hobbes, 1845a, pp. 326). Por eso, los ejes sobre los que Hobbes más discute el planteo de Wallis son las características de la aritmética y la interpretación de los 'indivisibles' como 'infinitesimales'.

---

[6] Es usual encontrar en la bibliografía secundaria la observación de que buena parte de las críticas recibidas por Wallis en su siglo está vinculada precisamente a este uso de la inducción en matemática infinita. Al respecto, puede verse: Jesseph (1999, pp. 177-178), Beeley (2013, pp. 54-55) y Crippa (2016, p. 416).

En este respecto, Hobbes recuerda un pasaje de primera proposición de *De sectionibus conicis* de 1655, en donde Wallis dijo: "Pues un paralelogramo cuya altura se supone infinitamente pequeña, es decir, nula (pues una cantidad infinitamente pequeña es por ello también no-quanta), es algo apenas distinto de una línea" (Wallis, 1655, p. 4). Esta idea está también muy presente en la *AI*, en especial en las primeras proposiciones, en las que Wallis buscó la razón entre series que comienzan de '0 o nada', así como también en los corolarios inmediatamente posteriores que se apoyan en la primera proposición. Por ejemplo, en la tercera proposición, Wallis señala que un triángulo "consta como si fuera de infinitas rectas paralelas", en la cuarta, que las pirámides o conoides parabólicas constan "como si fuera de infinitos planos", en la quinta, que se supone que las espirales constan "de infinitos arcos de sectores", y demás (Wallis, 1656a, p. 3-5). El cuestionamiento de Hobbes a propósito de la primera proposición de *De sectionibus conicis* se centra en la concepción de que un paralelogramo es 'apenas' (*vix*) distinto de una línea, pues considera que da lugar a un significado ambiguo, a saber: o la última altura es algo, o no es nada. En el primer caso, es decir, si es algo, no sería correcto comenzar las series con el cero, lo que genera que el resultado que se había obtenido es incorrecto. Esto es, si, por ejemplo, buscamos la razón que hay entre la serie de los números naturales y otra serie que tenga la misma cantidad de términos, todos iguales al mayor, y comenzamos la primera desde 0, tendremos: $\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sin embargo, si no comenzáramos desde cero, tendríamos $\frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{4}$. Ahora bien, si decimos que no es nada, tenemos el problema de que el primer término de la progresión aritmética no debería ser cero, es decir, volvemos a lo mismo. Más aún, desde una perspectiva no ya aritmética, sino geométrica, Hobbes critica la idea de Wallis de tomar a los infinitesimales como si fuesen 'cero' o 'nada', pues entonces la geometría tampoco sería nada, dado que no tendría fundamento ni comienzo sino en la nada (Hobbes, 1845a, p. 300-301). Con esto en mente, dice Hobbes, a propósito de la tercera proposición de la *AI*:

> "*El triángulo consta como si fuera*" ("como si fuera" no es una frase de un geómetra) "*de un número infinito de líneas rectas*". ¿Es así? Entonces, de acuerdo con tu doctrina de que "*las líneas no tienen anchura*", la altura de tu triángulo consta de un número infinito de 'no alturas', es decir, un número infinito de nadas, y en consecuencia el área de tu triángulo no tiene cantidad. (Hobbes, 1845a, p. 310)

Un año más tarde de que Hobbes publicara las *Six Lessons*, Wallis le respondió en un escrito titulado *Due Correction for Mr. Hobbes*. Entre otras cosas, Wallis se refirió al uso de las expresiones 'como si fuera' (*quasi*) y 'apenas' (*vix*). Estas expresiones apuntan a señalar que no nos referimos al objeto indicado de manera exacta, sino aproximada. En otras palabras, cuando utilizamos la expresión '*quasi linea*' o '*vix aliud quam linea*' nos referimos a algo que no es exactamente lo mismo que una línea, aunque se aproxima bastante, a saber, un paralelogramo cuya anchura es muy pequeña. De este modo, decir que un triángulo consta 'como si fuera' de líneas rectas, significa que está constituido por paralelogramos que son, respecto del triángulo, menores que cualquier cantidad asignable. Con esto, el significado de las expresiones '*quasi*' y '*vix*' es claro y determinado, por lo que son palabras que, entendidas, pueden utilizarse sin problemas en una 'frase de un geómetra' (Wallis, 1656b, p. 43).

Con la publicación de *Mechanica sive de motu tractatus geometricus* de Wallis en 1670, se reavivó la polémica entre estos autores sobre el estatus de los infinitesimales. En el cuarto capítulo de este texto, Wallis señaló que tomó de Cavalieri la idea de que las figuras se componen de un número infinito de elementos, en el sentido, por ejemplo, de los ejemplos a los que nos referimos antes de la *AI*. En concreto, dijo: *"Se entiende que algo continuo (según la Geometría de los Indivisibles de Cavalieri) consta de un número infinito de indivisibles"* (Wallis, 1670, p. 110). En este sentido, por ejemplo, una línea consta de infinitos puntos, una superficie, de infinitas líneas y un sólido, de infinitas superficies. Wallis mismo se encargó de aclarar que la idea de una composición de indivisibles es lo que explicó tanto en la *AI* como en el tratado *De sectionibus conicis* cuando señaló que las figuras constan de un número infinito de partículas homogéneas infinitamente exiguas. Para aclarar el carácter homogéneo de estas partículas, Wallis señaló: "Digo que una línea [se compone] de infinitos puntos, esto es, de infinitas *Liniecitas exiguas*, iguales en longitud o igualmente altas, de las cuales la longitud o altura es $\frac{1}{\infty}$ (parte infinitésima) de la longitud o altura de la línea toda" (Wallis, 1670, p. 110). En *Lux mathematica* de 1672, Hobbes indicó al respecto que no recuerda haber visto esta opinión escrita en el trabajo de Cavalieri en ninguna parte, es decir, ni como un axioma, ni como una definición ni como proposición. Más aún, añade que esta visión iría en contra de la noción clásica de continuo, típicamente aristotélica, según la cual lo continuo es divisible en partes que son siempre nuevamente divisibles (Aristóteles, *Física* 231b16). Si fuera como Wallis dice, debería darse una división en 'nadas' (*nihila*), como había dicho algunos años atrás (Hobbes, 1845b, p. 109). Por eso, finalmente, Hobbes se pregunta si esta idea de que, por ejemplo, una superficie se compone de líneas, no es contraria a la luz natural (Hobbes, 1845b, p. 149).

Al respecto de esta discusión, es importante señalar dos cosas. Primero, es cierto que, aunque Cavalieri haya planteado, como un teorema fundamental de su método, que dos figuras planas tienen entre sí la misma razón que la que hay entre la colección de líneas (es decir, los 'indivisibles') de dichas figuras, no se comprometió con ninguna teoría de la composición del continuo (Cavalieri, 1653, pp. 113-115). Para Cavalieri, los indivisibles de una figura no se obtienen dividiéndola, por lo que parecería que no considera que las figuras se compongan de ellos. No obstante, por otro lado, no fue la intención de Cavalieri proponer una teoría de la composición del continuo, sino un método geométrico. Más aún, como señala Andersen, es posible que Cavalieri haya planteado un método que permanezca completamente al margen de las teorías de la composición del continuo (Andersen, 1985, p. 364). Por eso, en segundo lugar, es posible que Wallis haya llevado a cabo su planteo con el mismo espíritu. Como veremos en la siguiente sección, Wallis opera bajo la suposición de infinitos infinitesimales, al margen de si las entidades geométricas efectivamente se componen de este modo o no.

2.2. El número infinito y la suposición de completitud de las series

Hobbes también fue crítico de la concepción de Wallis sobre la suposición de completitud de una serie. Recordemos que, para la suma de una serie, sea finita o infinita, Wallis supone un último término l, por lo que la serie se presume completa. En una serie de escritos breves que presentó a la Royal Society en 1671, Hobbes planteó varias críticas vinculadas especialmente con la primera proposición del quinto libro del *Mechanica sive de motu tractatus geometricus* que Wallis había publicado un año antes. En dicha proposición, Wallis retoma una de las conclusiones más importantes de la *AI*: dadas dos series, una de los números naturales, o de los cuadrados, cubos u otra potencia de ellos, serie de la cual se da el último término, y otra serie que tenga la misma cantidad de términos que la anterior, todos iguales al mayor, la razón entre dichas series será $\frac{1}{2}$, si la serie que consideramos es la de los números naturales, $\frac{1}{3}$ para los cuadrados, $\frac{1}{4}$ para los cubos, y así sucesivamente (Wallis, 1670, pp. 148-149). Con esto en mente, Hobbes le pide a Wallis que someta a revisión estos seis puntos (Hobbes, 1845a, pp. 431-433):

1. Si efectivamente podemos entender una secuencia infinita de cantidades de la que se da un último término.
2. Si una cantidad finita puede dividirse en un número infinito de cantidades menores o si consiste de un número infinito de partes.
3. Si, en consecuencia, hay una cantidad que sea mayor que el infinito.
4. Si hay alguna magnitud finita de la que no haya un centro de gravedad.
5. Si hay un número infinito.
6. Si queda algo en la *AI* que sea útil para demostrar o refutar alguna doctrina, en caso de que sea falso todo lo que se señaló antes.

Algunas de las respuestas a estos planteos de Hobbes habían sido planteadas por Wallis varios años antes. Por ejemplo, la cuestión sobre si hay un número infinito. Como es sabido, la cuestión de la existencia o no en acto de un número infinito fue motivo de controversias durante todo el siglo XVII.[7] En *Mathesis universalis* de 1657, Wallis indicó que no podemos asignar un número máximo, de modo que, aunque haya una infinitud de números, no hay un número infinito:

> Pero puesto que puede ampliarse la introducción de Unidades al infinito […], es, por consiguiente, imposible que se asigne un *número máximo*, y mucho menos todas las especies de números. Y por ello, aunque es imposible que se den infinitos números *en acto*, o un *número infinito* (esto es, que no tenga términos, pero supere todos los límites), sin embargo, son infinitos los números posibles, esto es, no hay en absoluto un término de números asignables para el que, cuando se alcance un número, no pueda aumentarse más. (Wallis, 1657, p. 21)

Más allá de este pasaje, Wallis respondió casi inmediatamente a las objeciones de Hobbes en un escrito publicado entre agosto y septiembre de 1671 en *Philosophical Transactions* (Wallis, 1671, pp. 2241-2244). Desde el comienzo de este escrito, Wallis enfatizó que la proposición a partir de la que Hobbes esbozó las objeciones fue formulada al modo hipotético-deductivo. Dicho en otras palabras, en ella se extrajeron conclusiones a partir de una situación inicial conjetural. Esta es una aclaración epistemológica o procedimental que es decisiva para comprender el planteo de Wallis. En sus propias palabras, Wallis dice que, *"si SUPONEMOS 'aquello', se seguirá 'esto'"* (Wallis, 1671, p. 2241). Por eso, para Wallis, Hobbes, en el primer punto que le pidió que revise, no debió haber dicho si podemos *entender* una secuencia infinita de cantidades de la que se da un último término, sino más bien si podemos *suponerla*. Para Wallis, podemos operar con esta suposición dado que nos permite obtener resultados. Teniendo esto en mente, Wallis responde a todos los puntos que Hobbes le marcó. Con respecto al primero, Wallis subraya que no se trata de que algo 'sea' o 'pueda ser', sino de si puede ser supuesto o si puede hacerse la suposición en la forma de una proposición condicional. Para ejemplificar su punto de vista, dice:

> Como cuando digo que, si el sr. Hobbes *fuera un Matemático, argumentaría de otra manera*; no afirmo que sea, que *haya sido* alguna vez o que *vaya a ser* tal cosa. Solamente digo (bajo suposición) *si fuera*, lo que no es. (Wallis, 1671, p. 2241)

[7] Recomiendo ver el trabajo Esqusisabel y Raffo Quintana 2017, pp. 1319-1342, a propósito de la discusión por parte de Leibniz de las conclusiones extraídas por Galileo acerca del número infinito.

Como vemos en la cita, el modo en el que Wallis piensa la idea de una suposición no implica que se afirme la existencia de aquello que se suponga. Más aún, Wallis subraya que para muchos matemáticos es habitual inferir verdades útiles suponiendo cosas imposibles (Wallis, 1671, p. 2242).[8]

Wallis no cree estar haciendo nada especialmente novedoso con la suposición de infinitos. Por eso, señala que desde Euclides podemos encontrar ejemplos de introducción de la suposición de infinitos, por ejemplo, en el segundo postulado, según el cual por la extensión indefinida de un segmento finito de recta obtenemos siempre una recta (*Elementos*, Lib. I, post. 2). Así, aunque no podamos llevarla a cabo en acto, podemos suponer una recta infinita. Más allá de la cuestión sobre si esta lectura responde con precisión o no a lo que dijo Euclides, lo cierto es que parece ser representativo de la manera en que en la temprana modernidad se leería este pasaje, especialmente en el contexto de los autores que han hecho uso de técnicas infinitarias.

Con esto, Wallis puede responder al tercero punto de Hobbes. La pregunta por si es posible tener un infinito mayor que otro, carecía por completo de sentido para quienes sostuvieron, en concordancia con Aristóteles, que el infinito es potencial. Sin pretensión de exhaustividad, puede decirse que en las lecturas del infinito potencial, un infinito es siempre igual a otro, precisamente porque no son actuales (Beeley, 1996, p. 295). En el siglo XVII, ya encontramos visiones que difieren de la aristotélica clásica, incluso entre los que formaron parte de la tradición de Aristóteles. Por ejemplo, Libert Froidmont sostuvo que un infinito puede ser mayor que otro: “Del mismo modo, en el número infinito de hombres posibles son infinitas no solamente las unidades sino también las centenas, aunque las unidades sean más que las centenas” (Froidmont, 1631, p. 37). Para Wallis, suponiendo infinitos, podemos inferir que unos son mayores que otros. Teniendo en cuenta el postulado de Euclides al que nos referimos antes, Wallis señala que, si suponemos una recta que es infinita por un solo lado, y luego suponemos que lo es por ambos, tendremos, en el segundo caso, un infinito mayor que otro: “como, por ejemplo, un *supuesto* número infinito de Hombres podría *suponerse* que tiene un número *Mayor* de ojos” (Wallis, 1671, p. 2243). De una manera análoga, Wallis responde al segundo y al quinto punto de Hobbes. Primero, que, aunque nadie pueda dividir en acto una línea al infinito, podemos suponer que está infinitamente dividida. En otras palabras, puede suponerse que una cantidad finita es divisible en un número infinito de partes, es decir, mayor que cualquier número finito asignable, pues no hay una instancia más allá de la cual tal división no pueda suponerse que continúa.

Estos comentarios de Wallis no fueron suficientes para Hobbes. Cuando consideró las respuestas de Wallis, destacó que, si lo que se supone es imposible, la conclusión que se extraiga será o falsa o simplemente no se demostrará. En términos más actuales, Hobbes señala que, en el planteo de Wallis, no se garantiza la consistencia lógica. Más aún, Hobbes señala que, si la suposición es una acción mental, es decir, un pensamiento (como operación intelectual), no es posible de hecho llevar a cabo la suposición de una serie infinita con un último término (Hobbes, 1845a, pp. 443-444). Un año más tarde, en *Lux mathematica*, Hobbes ahondó en el examen de la

[8] Si bien no lo analizaremos aquí, es digno de destacarse que esta concepción estuvo relativamente extendida en la época y que fue especialmente valorada por algunos promotores de la matemática infinita. Así, por ejemplo, es célebre la concepción leibniziana de las cantidades “ficticias” infinitas e infinitamente pequeñas, que, a pesar de ser imposibles, son útiles por los beneficios que le traen al matemático cuando las utiliza. Retomaremos esta cuestión en la conclusión del trabajo. Por lo demás, remitimos a Esquisabel y Raffo Quintana (2021).

suposición de infinitos en la misma perspectiva que venía desarrollando. Así, señaló que, según su parecer, la idea de una serie infinita de cantidades de la cual se da el último término, no difiere conceptualmente de la idea de *entender a lo infinito como finito* (Hobbes, 1845b, pp. 109-110). En otras palabras, si se diera el último término, no tendríamos un todo infinito, sino finito. Ahora bien, si así fuera, tendríamos un gran inconveniente con la idea de Wallis, que es uno de los pilares de su aritmética, según la cual, a medida que crecen las series, el exceso de la proporción que hay entre ellas decrece progresivamente, de modo que desaparece, si las series son infinitas. Como para Hobbes una cantidad con un último término es siempre finita, la idea de Wallis no se cumpliría. Dicho de otra manera, si la serie no fuera verdaderamente infinita, la demostración no sería exitosa. De esta manera, si partiéramos de la suposición de completitud de la serie, tendríamos que asumir como demostrado algo que no solo no ha sido probado, sino que no puede serlo: "En efecto, no está dado lo que no está expuesto y es conocido" (Hobbes, 1845b, pp. 150).

Lamentablemente, Wallis no respondió en detalle ni a los comentarios finales de los escritos presentados a la Royal Society ni a las objeciones de *Lux mathematica*. Con respecto a este último texto, la respuesta de Wallis, publicada en *Philosophical Transactions* en el mismo año, simplemente consistió, al menos en lo que respecta a las controversias que nos interesan, en remitir a los otros textos suyos en los que abordó las cuestiones criticadas por Hobbes (Wallis, 1671, pp. 5067-5073). Con respecto a los escritos de Hobbes presentados a la Royal Society, Wallis se limitó a hacer unas indicaciones que son puramente *ad hominem*. Señaló sencillamente que los comentarios finales de Hobbes son insignificantes, o incluso peor que ello, y que su matemática es trivial y débil, por lo que considera que no es necesario dar una respuesta (Wallis, 1671, p. 2250). Quizás, como señala Jesseph (1999, p. 185), la insistencia de Wallis de que se trata de una suposición busca evitar los cuestionamientos de los críticos de la matemática infinitesimal. Podríamos añadir a esto que la discusión parece haber llegado a un callejón sin salida, pues, en el fondo, para Wallis podemos suponer infinitos sin inconvenientes, mientras que para Hobbes esto genera inconsistencias.

2.3. La desaparición del exceso

La concepción de que, a medida que crece una serie, el exceso decrece hasta desaparecer (supuesto que la serie se da al infinito), recibió distintas críticas por parte de Hobbes. Por ejemplo, en *Six Lessons* recuerda la proposición XIX de *AI*, en la que Wallis sostuvo que la razón entre dos series, una de los cuadrados de los números naturales y otra que tenga la misma cantidad de números, todos iguales al mayor que el anterior, se acerca progresivamente a $\frac{1}{3}$, de modo que el exceso decrece hasta desaparecer. Hobbes señala que, con el mismo derecho con el que decimos que se acerca a $\frac{1}{3}$, puede decirse que se acerca a $\frac{1}{4}$ o a $\frac{1}{5}$. En consecuencia, el fundamento que propone Wallis es falso, así como también lo que se sigue de allí (Hobbes, 1845a, pp. 312-314). En *Due corrections*, Wallis expone una respuesta al planteo de Hobbes (Wallis, 1656b, pp. 46-48). En ella primero recuerda que, a medida que aumente el número de términos en las series en cuestión, el exceso disminuirá, de modo que, si el número de términos se supone infinito, la proporción entre las series estará infinitamente cerca (*infinitely near*) de la de $\frac{1}{3}$. Pero, en consecuencia, estas series pueden acercarse infinitamente a $\frac{1}{4}$ o a $\frac{1}{5}$, aunque no puedan estar *infinitamente cerca* de ellas. En otras palabras, dicho un poco anacrónicamente, el exceso decrece con $\frac{1}{3}$ como límite, de modo que la suma nunca será inferior a esta fracción, por más que se acerque cada vez más a $\frac{1}{4}$ o a $\frac{1}{5}$.

Sin embargo, notemos que esta explicación incluye una ligera variación, aunque importante, respecto de la que encontramos en la *AI*. En la formulación de *Due corrections* vemos que, supuesta la completitud de las series, la proporción que ellas mantienen está infinitamente cerca de la de $\frac{1}{3}$, lo que podría implicar que hay todavía un resto; en la explicación que encontramos en la *AI*, Wallis había señalado que, bajo este mismo supuesto, el exceso desaparecería (*evaniturus est*). Estas dos formulaciones serían sinónimas solamente en el caso de que entendamos que la infinita cercanía implica una coincidencia, es decir, la desaparición de cualquier excedente, lo que no queda claro si es o no lo que Wallis tiene en cuenta.

En unas observaciones que Hobbes redactó en 1657 sobre el pensamiento de Wallis, retomó la cuestión de la idea de que eventualmente el exceso desaparece. El problema para Hobbes no es considerar que el exceso pueda disminuir progresivamente. En este sentido, señala que siempre podemos producir un exceso menor a medida que crezca el número de términos, es decir, "sin proceder al *infinito*" (Hobbes, 1845a, p. 371). El cuestionamiento de Hobbes parece apuntar, implícitamente, a la suposición de completitud de la serie, que es fundamental para la afirmación de Wallis de que el error desaparecería, y que parecería entender más como una operación o proceso que como una suposición. Hobbes vuelve a la carga con el mismo argumento varios años más tarde, en *Lux mathematica* de 1672. En este caso, realiza algunas aclaraciones vinculadas con la noción de infinito que son muy importantes para su crítica (Hobbes, 1845b, p. 99-103).

En primer lugar, Hobbes hace una indicación que apunta a esclarecer el alcance del método inductivo. Así, recuerda que, aunque una proposición sea universalmente verdadera, es decir, tal que valga para todos los casos (*de omni*), no por ello será verdadera sobre el *número infinito*. Recordemos que para Wallis el número infinito es imposible, por lo que la propiedad, que se generaliza inductivamente para todos los casos posibles, alcanzaría también una instancia imposible. En segundo lugar, Hobbes alerta que sería inconveniente confundir las nociones de 'cantidad infinita' y de 'cantidad indeterminada'. En otras palabras, decir que la cantidad de términos de una serie puede aumentar continuamente, de modo que es indeterminada, no significa necesariamente que sea una 'cantidad infinita' (*infinita quantitas*). Para Hobbes, toda cantidad es finita, es decir, es de cierta grandeza (tanta), y nadie ha dicho nunca nada sobre algo que sea de una grandeza infinita (*infinite tanta*). Por eso, finalmente, Hobbes resalta que decir que el exceso prosigue 'al infinito' significa simplemente que no tiene fin (*sine fine*).

3. Conclusiones

La polémica entre Wallis y Hobbes deja un resultado ambiguo, en el sentido de que no es claro que uno de los dos haya quedado mejor posicionado en la disputa desde el punto de vista argumental. Más bien, de algún modo, parece que las estrategias de los autores se apoyan en el fondo sobre bases distintas. Volvamos brevemente sobre uno de los pasajes citados anteriormente: cuando Wallis señaló que, "si el sr. Hobbes *fuera un Matemático, argumentaría de otra manera*" a propósito de la suposición de completitud de las series, no solamente está atacando explícitamente a la persona de Hobbes, sino que también está señalando que *los matemáticos, de* *hecho, argumentan de un modo distinto al de Hobbes*. En otras palabras, la crítica conlleva implícitamente que, si fuera matemático, conocería la manera en la que ellos trabajan, según la que, a decir de Wallis, la suposición de cosas imposibles se lleva a cabo con cierta regularidad. En ese sentido, las argumentaciones de Wallis parecen estar guiadas especialmente por la *práctica* matemática de su época. En efecto, hay antecedentes incluso en los algebristas del siglo XVI en el uso de cantidades consideradas imposibles (como los números negativos) para la solución de ecuaciones (Katz y Sherry, 2012, pp. 168-169), del mismo modo que hay también ejemplos históricamente posteriores a Wallis. Entre ellos, vale la pena señalar especialmente el caso de Leibniz, para quien las cantidades infinitas e infinitamente pequeñas son “ficciones”, de modo que, a pesar de ser cantidades imposibles (en algún sentido de la palabra), son útiles para los matemáticos porque con ellas se obtienen verdades que podría obtenerse de otro modo, aunque con mayor dificultad (remitimos en esta cuestión a Esquisabel y Raffo Quintana 2021). En cambio, las argumentaciones de Hobbes, que naturalmente no se guían por lo que han hecho los matemáticos en el terreno de la matemática infinita, son argumentos filosóficamente desafiantes, algunos de los cuales incluso parecen incomodar a Wallis. En efecto, Hobbes procura detectar en el abordaje de Wallis algunas paradojas, contradicciones, inconsistencias y demás, que muestren el “absurdo” del uso de series infinitas en materia de cuadraturas. Por decirlo de alguna manera, su perspectiva no se basa en la práctica usual de los matemáticos, sino en razones fundadas más bien en el rigor lógico. Así, desde esta perspectiva, de algún modo, la polémica entre Wallis y Hobbes trasluce una de las dualidades más características de la temprana modernidad, que oscila entre la pretensión de desarrollar nuevos métodos heurísticos y el desafío de conservar el rigor argumental demostrativo.

SOBRE EL AUTOR

Federico Raffo Quintana es doctor en Filosofía por la Universidad Nacional de La Plata. Con anterioridad obtuvo los títulos de Profesor y Licenciado en Filosofía por la UCA. Su ámbito principal de investigación es la concepción del infinito de Leibniz, en especial en el contexto de sus exámenes sobre el problema de la composición del continuo y de su desarrollo en cuestiones de matemática infinita, temas sobre los que ha publicado libros y artículos especializados. Es investigador asistente del CONICET y con anterioridad se ha desempeñado como becario doctoral y posdoctoral en dicho Consejo. Además, se desempeña como Profesor Titular de Taller de lectura filosófica I y II y como Profesor Adjunto de Epistemología en la carrera de Filosofía, UCA.

BIBLIOGRAFÍA

Andersen, K. (1985). Cavalieri’s Method of Indivisibles. En *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 31, pp. 291-367.

Aristóteles (1995). *Física* (introducción, traducción y notas de Guillermo R. de Echandía). Madrid: Gredos.

Beeley, P. (1996). *Kontinuität und Mechanismus. Zur Philosphie des jungen Leibniz in ihrem Ideengeschichtlichen Kontext* (Studia Leibnitiana Supplementa, 30). Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Beeley, P. (2013). ‘Nova methodus investigandi’. On the Concept of Analysis in John Wallis’s Mathematical Writings. En *Studia Leibnitiana*, vol. 45(1), pp. 42-58.

Bernstein, H. (1980). Conatus, Hobbes, and the young Leibniz. En *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 11(1), pp. 25-37.

Cavalieri, B. (1653). *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota*. Bologna.

Crippa, D. (2016). *Impossibility results: from geometry to analysis. A study in early modern conceptions of impossibility*. Tesis doctoral. Paris: Université Paris Diderot Paris 7.

Esquisabel, O. y Raffo Quintana, F. (2017). Leibniz in Paris: a discussion concerning the infinite number of all units. En *Revista Portuguesa de Filosofía*, vol. 73(3-4), pp. 1319-1342.

Esquisabel, O. y Raffo Quintana, F. (2021). Fiction, possibility and impossibility: Three kinds of mathematical fictions in Leibniz’s work. En *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 75/6, pp. 613-647.

Euclides (1991). *Elementos*. *Libros I-IV* (introducción de Luis Vega, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños). Madrid: Gredos.

Froidmont, L. (1631). *Labyrinthus sive de compositione continui*. Anvers.

Hobbes, T. (1665). *Elementorum Philosophiae Sectio Prima De Corpore*. Londres.

Hobbes, T. (1845a). *The English Works of Thomas Hobbes* (ed. William Molesworth). Londres: John Bohn. Vol. VII.

Hobbes, T. (1845b). *Opera Philosophica quae latina scripsit omnia* (ed. William Molesworth). Londres, Vol. V.

Jesseph, D. (1999). *Squaring the Circle. The War between Hobbes and Wallis*. Chicago & London: The University of Chicago Press.

Joven, F. (1997). Los infinitesimales como ficciones útiles para Leibniz: la polémica en la academia de París. En *Theoria - Segunda Época*, vol. 12/2, pp. 257-279.

Katz, M. y Sherry, D. (2012). Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions. En *Studia Leibnitiana*, vol. 44/2, pp. 168-169.

MacDonald Ross, G (2007). Leibniz’s Debt to Hobbes. En Phemister, P. y Brown, S. (eds.). *Leibniz and the English-Speaking World* (pp. 19-33). Dordrech: Springer

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York and Oxford: Oxford University Press.

Probst, S. (2018). The Relation between Leibniz and Wallis: an Overview from New Sources and Studies. En *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, vol. XVI, pp. 189-208.

Raffo Quintana, F. (2018). Leibniz on the requisites of an exact arithmetical quadrature. En *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 67, pp. 65-73.

Raffo Quintana, F. (2020). La visión de Leibniz sobre el producto infinito de Wallis. En *Tópicos. Revista de Filosofía de Santa Fe*, vol. 39, pp. 118-148.

Wallis, J. (1655). *De sectionibus conicis. Nova Methodo Expositis Tractatus*. Oxford.

Wallis, J. (1656a). *Arithmetica infinitorum*. Oxford.

Wallis, J. (1656b). *Due correction for Mr Hobbes· Or Schoole discipline, for not saying his lessons right. In answer to his Six lessons, directed to the professors of mathematicks. / By the professor of geometry*. Oxford.

Wallis, J. (1657). *Mathesis universalis; sive, Arithmeticum opus Integrum, tum Numerosam Arithmeticam tum Speciosam complectens*. Oxford.

Wallis, J. (1670). *Mechanica sive de motu tractatus geometricus*. Oxford.

Wallis, J. (1671). An Answer to Four Papers of Mr. Hobs, Lately Published in the Months of August, and This Present September, 1671. En *Philosophical Transactions*. vol. 6, pp. 2241-2244.

Wallis, J. (1671). Dr. John Wallis His Answer, by Way of Letter to the Publisher, to the Book, Entituled Lux Mathematica, &c. Described in Numb. 86. of These Tracts. En *Philosophical Transactions*, vol. 7, pp. 5067-5073.